

Površinski integrali

December 3, 2020

Površ

Definicija

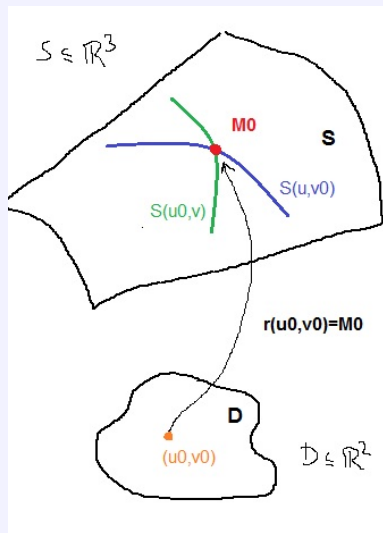
Površ u \mathbb{R}^3 je neprekidno preslikavanje $S : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gde je D ograničena oblast u \mathbb{R}^2 .

Parametrizacija površi u \mathbb{R}^3 :

$$\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}.$$

u i v su **parametri** površi, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$.



Neka je D ograničena oblast u \mathbb{R}^2 i $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $(u_0, v_0) \in D$ proizvoljna tačka.

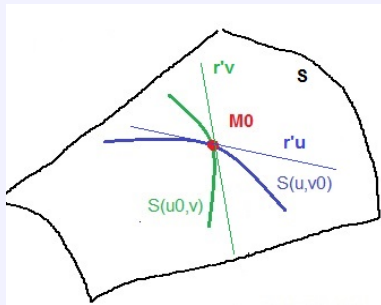
D se slika u S .

$(u_0, v_0) \in D$ se slika u $M_0 \in S$.

Ako fiksiramo jednu koordinatu $v = v_0$ tada funkcija $S(u, v_0)$ predstavlja krivu na površi S .

Ako fiksiramo drugu koordinatu $u = u_0$ tada funkcija $S(u_0, v)$ predstavlja krivu na površi S .

Obe ove krive "prolaze" kroz tačku M_0 i zovu se **koordinatne linije površi**.



Tangentni vektori ovih krivih u tački $M_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ su $\vec{r}'_u(u_0, v_0)$ i $\vec{r}'_v(u_0, v_0)$.

Definicija

Ravan T kroz tačku $M_0 \in S$ je **tangentna ravan površi S** ako tangentni vektor svake krive te površi koja prolazi kroz M_0 pripada T .

Definicija

Prava L koja prolazi kroz $M_0 \in S$ i pri om je normalna na tangentnu ravan površi u M_0 je **normala površi** S u tački M_0 .

Normala na ravan T je vektorski proizvod tangenčnih vektora koordinatnih linija $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$.

Neka je za $\vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}$

$$J = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Označimo sa A, B, C kofaktore od J :

$$A(u, v) = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$B(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$C(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}$$

Jednačina tangentne ravni u tački $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ data je sa:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Jednačina normale na površ u tači $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ data je sa:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Površinski integral prve vrste

Neka je na $S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadata neprekidna funkcija $F : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Neka je $P = \{\Delta_i | i = 1, \dots, p\}$ proizvoljna podela oblasti D .

P indukuje podelu $P' = \{S_i | i = 1, \dots, p\}$ na površi S .

U svakom delu S_i podele P' izaberemo proizvoljnu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Integralna suma $\sum_{i=1}^p F(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$, gde je sa μS_i označena mera površi S_i .

Definicija

Ako za funkciju f postoji konačan $\lim_{\delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p F(x_i, y_i, z_i) \cdot \mu S_i$ (sa δS_i je označen dijametar skupa S_i) onda se on naziva **površinskim integralom prve vrste** funkcije f po površi S i označava sa $\int \int_S f(x, y, z) dS$.

Izračunavanje površinskog integrala prve vrste svodi se na izračunavanje dvostrukog integrala:

Teorema

Izračunavanje površinskog integrala prve vrste

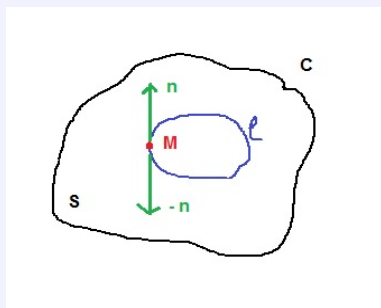
Ako je površ S neprekidna i zadata deo-po-deo glatkom parametrizacijom i ako je na njoj efinisana neprekidna funkcija $F(x, y, z)$, onda važi jednakost

$$\int \int_S F(x, y, z) dS =$$

$$\int \int_D F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} du dv.$$

Specijalno, ako je $F(x, y, z) = 1$ onda je $\int \int_S F dS$ površina te površi.

Orijentacija površi



Neka je S zatvorena površ ili ograničena deo-po-deo glatkom krivom C .

Neka je $M \in S$ proizvoljna tačka površi i $\ell \in S$ proizvoljna zatvorena kriva površi koja ne seče C i sadrži tačku M .

U svakoj tački površi definisana su dva jedinična vektora normale \vec{n} i $-\vec{n}$.

Ako pustimo vektor \vec{n} da se "kreće" po krivom ℓ počevši od M imamo 2 slučaja:

- $\vec{n}(M)$ kada "obrne krug" vraća se u početni $\vec{n}(M)$.
- $\vec{n}(M)$ kada "obrne krug" vraća se u suprotan $-\vec{n}(M)$.

Definicija

Ako se za svaku tačku $M \in S$ i za svaku zatvorenu krivu na površi koja sadrži tačku M promenljivi vektor normale vraća u početni položaj onda je S **dvostrana površ**. Svaki od vektora \vec{n} i $-\vec{n}$ određuje jednu stranu površi.

Pomoću ovih vektora možemo orijentisati površ:
strana koju određuje \vec{n} je **pozitivna**, a strana koju određuje $-\vec{n}$ je **negativna** strana površi.

Definicija

Ako postoji bar jedna zatvorena kriva na S takva da se vektor normale \vec{n} vraća u suprotan položaj $-\vec{n}$ onda je S **jednostrana površ**.

Jednostrane površi su neorijentisane.

Površinski integral druge vrste

$S : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ -
glatka orijentisana površ.

Izaberemo jednu stranu površi i sa $\vec{n}(x, y, z)$ označimo vektorsko polje jediničnih normala na S .

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$ - neprekidna realna funkcija.

Neka je $P = \{\Delta_i | i = 1, \dots, p\}$ proizvoljna podela oblasti D .

P indukuje podelu $P' = \{S_i | i = 1, \dots, p\}$ na površi S .

U svakom delu S_i podele P' izaberemo proizvoljnu tačku $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Označimo sa $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ uglove koje normala $\vec{n}(M_i)$ zaklapa sa osama Ox, Oy i Oz :

$$\alpha_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Ox)$$

$$\beta_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Oy)$$

$$\gamma_i = \sphericalangle(\vec{n}(M_i), Oz).$$

Posmatrajmo sume:

$$\sum_{i=1}^p f(x_i, y_i, z_i) \cos(\alpha_i) \cdot \mu S_i$$

$$\sum_{i=1}^p f(x_i, y_i, z_i) \cos(\beta_i) \cdot \mu S_i$$

$$\sum_{i=1}^p f(x_i, y_i, z_i) \cos(\gamma_i) \cdot \mu S_i$$

gde je sa μS_i označena mera površi S_i .

Definicija

Ako za funkciju f postoji konačan $\lim_{\delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p f(x_i, y_i, z_i) \cos(\alpha_i) \cdot \mu S_i$ (sa δS_i je označen dijametar skupa S_i) onda se on naziva **površinskim integralom druge vrste** funkcije f po površi S i označava sa

$$\int_S f(x, y, z) \cos(\alpha) dS.$$

Analogno za $\int_S f(x, y, z) \cos(\beta) dS$ i $\int_S f(x, y, z) \cos(\gamma) dS$.

Teorema

Izračunavanje površinskog integrala druge vrste

Za glatku, orijentisanu površ S i neprekidnu funkciju $f(x, y, z)$ definisanu na toj površi, važe jednakosti:

$$\int \int_S f(x, y, z) \cos(\alpha) dS =$$

$$\int \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \cdot \cos(\alpha) du dv$$

$$\int \int_S f(x, y, z) \cos(\beta) dS =$$

$$\int \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \cdot \cos(\beta) du dv$$

$$\int \int_S f(x, y, z) \cos(\gamma) dS =$$

$$\int \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \cdot \cos(\gamma) du dv$$

Promenom pravca normale (tj. strane površi) po kojoj se vrši integracija, menja se i znak integrala jer:

$$\cos(\angle(-\vec{n}(M_i), Ox)) = -\cos(\angle(\vec{n}(M_i), Ox)).$$

Analogno za Oy i Oz

$$\text{Odatle, } \int \int_{S_+} f \cos(\alpha) dS = - \int \int_{S_-} f \cos(\alpha) dS.$$

Obično se posmatraju površinski integrali oblika

$$\int \int_S (P \cos(\alpha) + Q \cos(\beta) + R \cos(\gamma)) dS$$

gde su P, Q, R funkcije definisane i neprekidne na S .